Лекция 7 «Уравнение Бернулли. Практические приложения уравнения Бернулли»

Цель: Приведите вывод уравнения Бернулли. Перечислите известные практические приложения уравнения Бернулли. Дайте их характеристику.

Краткий конспект лекции:

Система уравнений:

$$-\frac{\partial p}{\partial x} = \rho w_x \frac{dw_x}{dx}, \qquad (1)$$

$$-\frac{\partial p}{\partial y} = \rho w_y \frac{dw_y}{dy}, \qquad (2)$$

$$-\left(g\rho + \frac{\partial p}{\partial z} \right) = \rho w_z \frac{dw_z}{dz}. \qquad (3)$$

представляет собой дифференциальные уравнения движений идеальной жидкости Эйлера для установившегося потока.

Решение этих уравнений приводит к одному из наиболее важных и широко используемых уравнений гидродинамики – *уравнению Бернулли*.

Умножив левые и правые части каждого из уравнений (1-3) соответственно на dx, dy, dz и разделив на плотность ρ жидкости, получим

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} dx = \frac{dx}{d\tau} dw_x \qquad (4)$$

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} dy = \frac{dy}{d\tau} dw_y \qquad (5)$$

$$-\left(gdz + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} dz \right) = \frac{dz}{d\tau} dw_z \qquad (6)$$

Сложим эти уравнения, учитывая, что производные $\frac{dx}{d\tau}, \frac{dy}{d\tau}, \frac{dz}{d\tau}$ выражают проекции w_x, w_y, w_z скорости на соответствующие оси координат. Тогда

$$-\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz \right) - gdz = w_x dw_x + w_y dw_y + w_z dw_z \qquad (7)$$

Слагаемые правой части этого уравнения могут быть представлены как

$$w_x dw_x = d\left(\frac{w_x^2}{2} \right), \;\; w_y dw_y = d\left(\frac{w_y^2}{2} \right), \;\; w_z dw_z = d\left(\frac{w_z^2}{2} \right) \qquad (8)$$

следовательно, их сумма

$$d\left(\frac{w_x^2}{2} \right) + d\left(\frac{w_y^2}{2} \right) + d\left(\frac{w_z^2}{2} \right) = d\left(\frac{w_x^2 + w_y^2 + w_z^2}{2} \right) = d\left(\frac{w^2}{2} \right), \qquad (9)$$

где $w = |\vec{w}|$ – скорость, составляющие которой вдоль соответствующих осей равны w_x, w_y, w_z.

В то же время, сумма членов, стоящих в скобках в правой части записанного уравнения, представляет собой полный дифференциал давления dp (при уставновившихся условиях давление зависит лишь от положения точки в пространстве, но в каждой данной точке не меняется со временем). Значит

$$d\left(\frac{w^2}{2}\right) = -\frac{dp}{\rho} - gdz. \tag{10}$$

Разделив обе части этого уравнения на ускорение свободного падения g и перенеся все его члены в левую часть, находим

$$d\left(\frac{w^2}{2g}\right) + \frac{dp}{\rho g} + dz = 0. \tag{11}$$

Для несжимаемой однородной жидкости $p = const,$ поэтому сумма дифференциалов может быть заменена дифференциалом суммы, следовательно

$$d\left(z + \frac{p}{\rho g} + \frac{w^2}{2g}\right) = 0 \tag{12}$$

откуда

$$z + \frac{p}{\rho g} + \frac{w^2}{2g} = const. \tag{13}$$

Уравнение (13) является *уравнением Бернулли для идеальной жидкости*.

Велечину $\left(z + \frac{p}{\rho g} + \frac{w^2}{2g}\right)$ называют *полным гидродинамическим напором*, или просто *гидродинамическим напором*.

Следовательно, согласно уравнению Бернулли, *для всех поперечных сечений установившегося потока идеальной жидкости гидродинамический напор остается неизменным*.

Сумма $\left(z + \frac{p}{\rho g}\right)$, называемая полным гидростатическим, или просто статическим напором выражает полную удельную потенциальную энергию в данной точке (данном сечении). Эти два слагаемых входили в основное уравнение гидростатики (см. Лекцию №4).

Величину $\frac{w^2}{2g}$ называют скоростным или динамическим напором. Скоростной напор характеризует удельную кинетическую энергию в данной точке (данном сечении).

Из уравнения Бернулли в соответствии с энергетическим смыслом его членов следует, что при установившемся движении идеальной жидкости сумма потенциальной и кинетической энергии жидкости для каждого из поперечных сечений потока остается неизменной.

Все слагаемые величины в уравнении Бернулли выражены в единицах длины

$$\left[\frac{p}{\rho g}\right]=\left[\frac{н/м^2}{кг/м^3\cdot м/с^2}\right]=м,$$

$$\left[\frac{w^2}{2g}\right]=\left[\frac{м^2/с^2}{м/с^2}\right]=м.$$

Таким образом, уравнение Бернулли является частным случаем закона сохранения энергии и выражает энергетический баланс потока.

Уравнения Бернулли применяют для определения скоростей и расходов и времени истечения жидкостей из резервуаров [1-3].

Практические приложения уравнения Бернулли

Рассмотрим применение уравнения Бернулли для определения скоростей и расходов и времени истечения жидкостей из резервуаров.

Принципы измерения скорости и расхода жидкости. Для определения скоростей и расходов жидкостей в промышленной практике обычно применяются дроссельные приборы и пневмометрические трубки.

Принцип работы *пневмометрических трубок*, например трубки Пито-Прандтля, может быть пояснен с помощью рис. 1. В каждом сечении разность уровней жидкости в трубках, изображенных на рисунке, выражает скоростной напор $h_{ск}$ в точке сечения, лежащей на оси трубы.

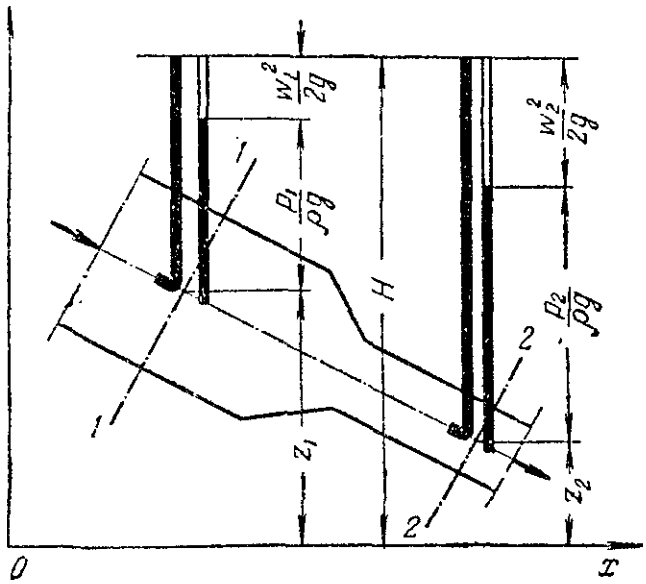
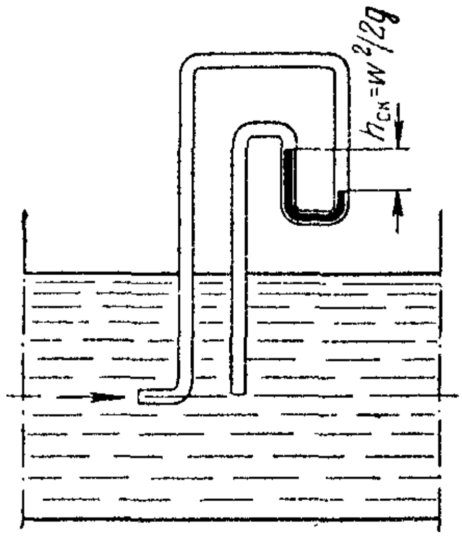


Рис. 1. К уравнению Бернулли для идеальной жидкости



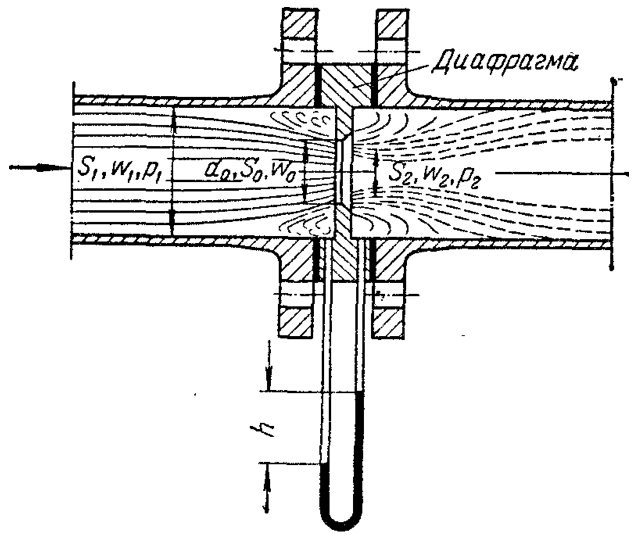


Рис. 2. Измерение скорости жидкости пневмометрической трубкой

Рис. 3. Мерная диафрагма

Разность уровней рабочей жидкости в трубках удобнее измерять не посредством *пьезометрических* трубок, как показано на рис. 1, а при помощи *дифференциального манометра* (рис. 2). Его U-образная трубка заполнена жидкостью, которая не смешивается с рабочей и имеет значительно большую плотность, чем последняя (например, вода или спирт – при работе с газами или ртуть – при работе с капельными жидкостями). Это позволяет измерять перепады давлений в случае значительного избыточного давления (или вакуума) в трубопроводе при относительно небольшой высоте прибора.

По результатам измерений $h_{ск} = \frac{w^2}{2g}$ находят максимальную скорость жидкости вдоль оси трубопровода. Для определения средней скорости жидкости либо снимают эпюру распределения скоростей по сечению трубопровода (см. рис. 4), передвигая пневмометрическую трубку в различные точки сечения, либо используют соотношения между средней и максимальной, скоростями при ламинарном и турбулентном режимах течения. Расход жидкости находят, умножая среднюю скорость на площадь поперечного сечения трубопровода.

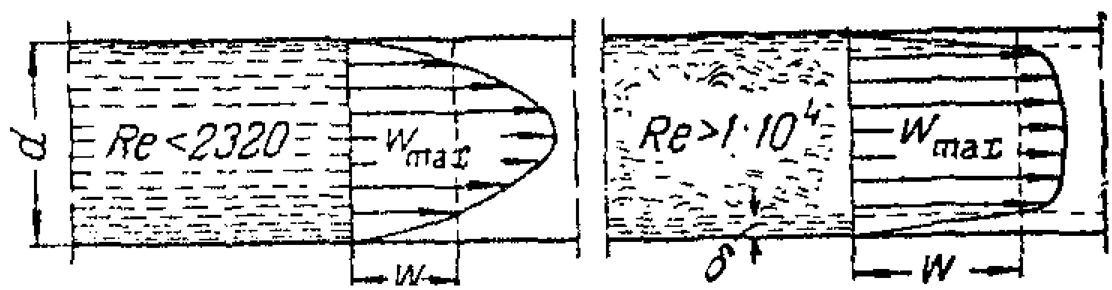


Рис. 4. Распределение скоростей при различных режимах движения: *а* — ламинарный поток; *б* — турбулентный поток

Такой способ определения скорости и расхода жидкости прост, но недостаточно точен из-за трудности установки пневмометрических трубок строго вдоль оси трубопровода.

Более широко распространено определение скоростей и расходов жидкостей с помощью *дроссельных приборов*, принцип работы которых основан на измерении перепада давлений при изменении поперечного сечения трубопровода. При искусственном сужении сечения потока посредством дроссельного прибора скорость и, соответственно, кинетическая энергия потока в этом более узком сечении возрастают, что приводит к уменьшению потенциальной энергии давления в том же сечении. Поэтому, измерив дифференциальным манометром перепад давлений между сечением трубопровода до его сужения и сечением в самом сужении (или вблизи него), можно вычислить изменение скорости между сечениями, а по нему – скорость и расход жидкости.

В качестве дроссельных приборов используют мерные диафрагмы, сопла и трубы Вентури.

Мерная диафрагма (рис. 3) представляет собой тонкий диск с отверстием круглого сечения, центр которого расположен на оси трубы. *Мерное сопло* (рис. 4) является насадком, имеющим плавно закругленный вход и цилиндрический выход. Дифманометры мерных сопел (а также диафрагм) присоединяют к трубопроводу через кольцевые камеры *a,* соединенные с внутренним пространством Трубопровода отверстиями, равномерно расположенными по окружности, или двумя каналами b.

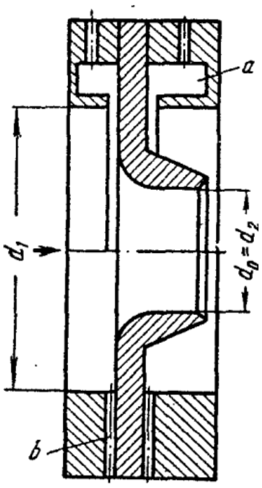


Рис. 4. Мерное сопло

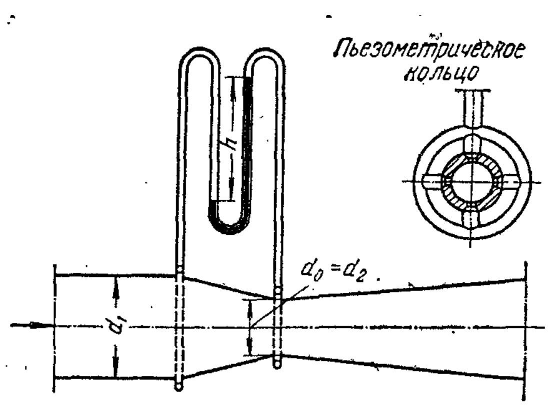


Рис. 5. Труба Вентури

Труба Вентури (рис. 5) имеет постепенно сужающееся сечение, которое затем расширяется до первоначального размера. Вследствие такой формы трубы Вентури потеря давления в ней меньше, чем в диафрагмах или соплах. Вместе с тем длина трубы Вентури очень велика по сравнению с толщиной диафрагмы или сопла, которые могут быть установлены между фланцами трубопровода.

В трубе Вентури и в сопле площадь сечения сжатой струи $S_2 = \frac{\pi d_1^2}{4}$ равна площади самого отверстия $S_0 = \frac{\pi d_0^2}{4}$ ($S_1 = \frac{\pi d_1^2}{4}$ – площадь сечения трубопровода, на котором установлен дроссельный прибор). В диафрагме $S_2 < S_0$ (см. рис. 3).

Считая трубопровод горизонтальным, запишем для двух сечений, перепад давлений между которыми измеряется дифференциальным манометром, уравнение Бернулли. В соответствии с обозначениями на рис. 3 и пренебрегая потерей напора, имеем

$$\frac{p_1}{2g}+\frac{w_1^2}{2g} = \frac{p_2}{2g}+\frac{w_2^2}{2g}$$

откуда

$$\frac{w_2^2}{2g}-\frac{w_1^2}{2g} = \frac{p_1-p_2}{\rho g}=h$$

где h – перепад (разность) давлений, измеряемый дифференциальным манометром. В выражаемый в метрах столба рабочей жидкости.

Чтобы определить среднюю скорость и расход жидкости в трубопроводе, выразим скорость w_1 в сечении трубы через скорость w_2 в узком сечении струи за диафрагмой, в котором замеряется давление p_2, пользуясь уравнением неразрывности потока

$$w_1 = w_2\frac{S_2}{S_1} = w_2\frac{d_2^2}{d_1^2}$$

Подставим значение w_1 в выражение разности скоростных напоров

$$\frac{w_2^2}{2g}-\frac{w_2^2}{2g}\left(\frac{d_2}{d_1}\right)^4 = h$$

откуда

$$w_2 = \sqrt{\frac{2gh}{1-\left(\frac{d_2}{d_1}\right)^4}}$$

Объемный расход жидкости Q в сечении S_o отверстия диафрагмы (а значит, и в трубопроводе) будет равен

$$Q = \frac{\alpha\pi}{4}d_0^2\sqrt{\frac{2gh}{1-\left(\frac{d_2}{d_1}\right)^4}} \qquad (14)$$

где α – поправочный коэффициент ($\alpha < 1$); этим коэффициентом учитывается уменьшение скорости w_0 в сечении S_0 по сравнению со скоростью w_2 из-за сужения струи ($S_0 > S_2$), а также потеря напора в диафрагме.

Коэффициент α называется *коэффициентом расхода дроссельного прибора*. Его значение зависит от значения критерия Рейнольдса для жидкости и от отношения диаметра отверстия дроссельного прибора к диаметру трубопровода:

$$\alpha = f\left(Re, \frac{d_0}{d_1}\right) \tag{15}$$

Значения α, определенные опытным путем, приводятся в специальной и справочной литературе.

Диаметр дроссельного устройства обычно в 3-4 раза меньше диаметра трубопровода, поэтому величиной $(d_2/d_1)^4$ в уравнении (14) можно в первом приближении пренебречь и находить расход жидкости по уравнению

$$Q = \frac{\alpha\pi}{4} d_0^2 \sqrt{2gh} \tag{16}$$

Среднюю скорость жидкости в трубопроводе определяют, разделив Q на площадь сечения трубопровода. Опуская индексы «1» у w_1 и d_1, получим

$$w = \alpha\left(\frac{d_0}{d}\right)^2 \sqrt{2gh} \tag{17}$$

В случае работы со сжимаемыми жидкостями (газом или паром) при больших перепадах давлений в уравнения (16) и (17) вводят еще один поправочный коэффициент, учитывающий изменение плотности газа (пара).

Истечение жидкостей. Определим расход жидкости при ее *истечении через круглое отверстие в тонком днище открытого сосуда*, в котором поддерживается *постоянный уровень Н* жидкости (рис. 6, *а).*

Вытекающая из такого отверстия струя резко сжимается при выходе вследствие инерционного движения частиц жидкости, приближающихся внутри сосуда к отверстию по криволинейным траекториям (некоторые из них даже непосредственно перед выходом еще скользят почти параллельно днищу, то есть перпендикулярно оси струи). Расстояние от днища до сжатого сечения (вслед за которым дальнейшее сужение струи из-за увеличения скорости падающей жидкости выражено гораздо слабее) невелико и составляет около половины диаметра отверстия.

Выбрав плоскость сравнения *0—0* параллельной днищу сосуда, напишем уравнение Бернулли (считая жидкость идеальной) для сечения *1—1,* соответствующего верхнему уровню жидкости в сосуде, и сечения *2—2,* плоскость которого проходит через указанное сжатое сечение вытекающей струи:

$$z_1 + \frac{p_1}{2g} + \frac{w_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{2g} + \frac{w_2^2}{2g}$$

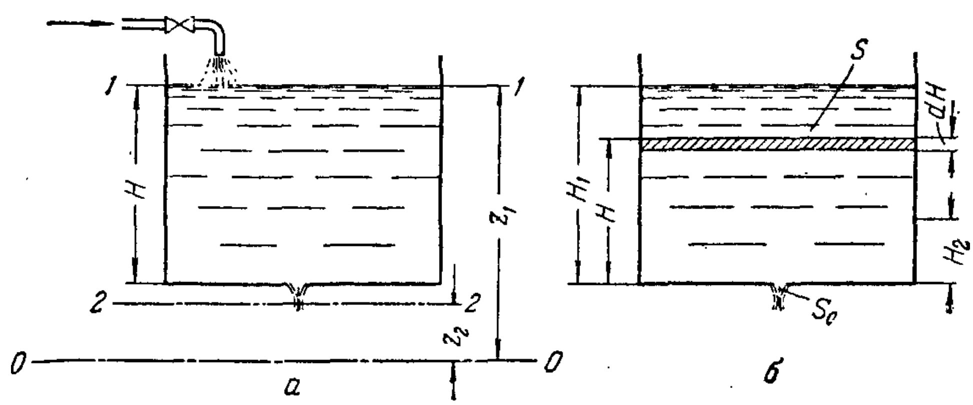


Рис. 6. Истечение жидкости из сосуда:
а – при постоянном уровне; *б* – при переменном уровне

Для открытого сосуда $p_1 = p_2$; кроме того, при постоянном уровне жидкости скорость $w_1 = 0$. Пренебрегая небольшим расстоянием от плоскости отверстия в днище сосуда до плоскости сжатого сечения струи, можно принять, что $z_1 - z_2 \approx H$. Отсюда

$$\frac{w_2^2}{2g} = H$$

Следовательно

$$w_2 = \sqrt{2gH} \tag{18}$$

что соответствует известной формуле Торичелли.

При движении реальной жидкости часть напора *H* теряется на трение и преодоление сопротивления, обусловленного внезапным сужением потока в отверстии. Поэтому скорость реальной жидкости в сжатом сечении:

$$w_2 = \varphi\sqrt{2gH}$$

где φ – поправочный коэффициент ($\varphi < 1$), называемый *коэффициентом скорости*, которым учитываются потери напора при истечении через отверстие.

Объемный расход Q *($м^3/сек$)* жидкости равен произведению ее скорости w_2 на площадь сжатого сечения S_2 струи. Обозначим отношение S_2 к площади поперечного сечения S_0 отверстия в днище через ε. Это отношение $\varepsilon = S_2/S_0$ называют *коэффициентом сжатия струи*. Тогда

$$Q = w_2 S_2 = \varphi\sqrt{2gH}\varepsilon S_0$$

или

$$Q = \alpha S_0\sqrt{2gH} \tag{19}$$

Коэффициент α представляет собой *коэффициент расхода* и выражается произведением коэффициентов скорости и сжатия струи:

$$\alpha = \varphi\varepsilon \qquad (20)$$

Этот коэффициент определяют опытным путем, его значения зависят от значения критерия Re и могут быть найдены в справочниках в зависимости от свойств и скорости жидкости, а также от формы отверстия, его размера и удаленности от стенок сосуда.

Из уравнения (19) следует, что *расход жидкости, вытекающей через отверстие в тонком днище, зависит от высоты постоянного уровня жидкости над отверстием и от размера отверстия, но не зависит от формы сосуда.* Это уравнение применимо также для определения расхода жидкости, вытекающей через отверстие в тонкой боковой стенке сосуда, если считать H расстоянием от верхнего уровня жидкости до оси отверстия.

Для жидкостей, по вязкости мало отличающихся от воды, можно принимать в первом приближении $\alpha \approx$ 0,62. При истечении жидкости через короткий цилиндрический патрубок (насадок) происходит дополнительная потеря напора на входе и выходе жидкости, что приводит к снижению φ. Вместе с тем струя при входе в патрубок после некоторого сжатия снова расширяется и вытекает, заполняя все его сечение, т.е. можно считать ε = 1. В итоге коэффициент расхода жидкости при истечении через насадки оказывается большим, чем при истечении через отверстие, и для воды может быть принят $\alpha \approx 0{,}82$.

Если сосуд, из которого вытекает жидкость, закрыт и давление p_2 над жидкостью в нем отличается от наружного давления p_1, то при определении расхода по формуле (19) вместо H в нее следует подставить $H + \frac{p_2 - p_1}{\rho g}$, где ρ – плотность жидкости.

Теперь рассмотрим *истечение при переменном уровне жидкости* в сосуде с целью определения *времени опорожнения сосудов*.

При таком истечении жидкости (рис. 6, *б)* ее уровень H в сосуде снижается во времени и, согласно уравнению (18), уменьшается также скорость истечения w_0. Следовательно, процесс истечения носит *нестационарный* характер.

Определим время, за которое уровень жидкости в сосуде опустится от первоначальной высоты H_1 до некоторой высоты H_2. За бесконечно малый промежуток времени $d\tau$, в соответствии с уравнением (19), через отверстие в днище вытечет объем жидкости

$$dV = Qd\tau = \alpha S_0 \sqrt{2gH}d\tau$$

где S_0 – площадь поперечного сечения отверстия в днище сосуда.

За тот же промежуток времени $d\tau$ уровень жидкости в сосуде понизится на бесконечно малую величину dH, и при постоянной площади поперечного сечения S сосуда убыль жидкости в нем составит

$$dV = -SdH$$

Знак минус в правой части указывает на уменьшение высоты жидкости в сосуде.

Приравнивая, согласно уравнению неразрывности потока, эти объемы, получим

$$\alpha S_0 \sqrt{2gH}d\tau = -SdH$$

откуда

$$d\tau = -\frac{SdH}{\alpha S_0\sqrt{2gH}}$$

Проинтегрируем это выражение, принимая, что коэффициент расхода α постоянен, т.е. не зависит от скорости истечения:

$$\int_0^\tau d\tau = -\int_{H_1}^{H_2}\frac{SdH}{\alpha S_0\sqrt{2gH}}$$

$$\tau = \frac{S}{\alpha S_0\sqrt{2g}}\int_{H_1}^{H_2} H^{-1/2}dH = \frac{S}{\alpha S_0\sqrt{2g}}\left(\sqrt{H_1} - \sqrt{H_2}\right)$$

Таким образом, время опорожнения сосуда, имеющего постоянное поперечное сечение, от высоты H_1 до высоты H_2 составляет

$$\tau = \frac{2S\left(\sqrt{H_1}-\sqrt{H_2}\right)}{\alpha S_0\sqrt{2g}} \tag{21}$$

В случае полного опорожнения резервуара $H_2 = 0$ и уравнение (21) принимает вид

$$\tau = \frac{2S\sqrt{H_1}}{\alpha S_0\sqrt{2g}} \tag{21a}$$

Решая задачу о времени опорожнения сосуда, площадь поперечного сечения которого изменяется по высоте (например, при истечении из конических резервуаров, горизонтальных цистерн и т.п.), следует при интегрировании выражения dτ учесть зависимость площади сечения S от уровня H жидкости, т.е. учесть вид функции $S = f(H)$.

Вопросы для самоконтроля:
1. Приведите вывод уравнения Бернулли.
2. Перечислите известные практические приложения уравнения Бернулли. Дайте их характеристику.

Литература
1. Лекции по курсу «Основные процессы и аппараты химической технологии»: учебно-методическое пособие / составители: Ж.Т. Ешова, Д.Н. Акбаева. – Алматы: Қазақ университеті, 2017. – 392 с.
2. Касаткин А.Г. Основные процессы и аппараты химической технологии. – М.: Химия, 1973. – 752 с.
3. Романков П.Г., Фролов В.Ф., Флисюк О.М. Методы расчёта процессов и аппаратов химической технологии (примеры и задачи). – Санкт-Петербург: ХИМИЗДАТ, 2009. – 544 с.